

# 6 자유도 병렬 공작 기계를 위한 동역학 모델링 Dynamic Modeling for 6-DOF Parallel Machine Tool

\*조한상(서울대 대학원), \*\*김종원(서울대 기계설계학과)  
\*Han-Sang Cho (Graduate School, Seoul National Univ.), \*\*Jongwon Kim (Seoul National Univ.)

## ABSTRACT

This paper deals with dynamics and control of a PRP6-DOF parallel manipulator. Dynamic modeling includes the effect of inertia of all links in the mechanism to increase modeling accuracy. Kinematic analysis about forward and inverse kinematics is also explained. Using Lagrange-D'Alembert method we get equations of motions in a link space which fully represent 6-DOF motions of the manipulator.

**Key Words:** parallel manipulator, dynamic modeling, link inertia, Lagrange-D'Alembert method

### 1. 서론

직렬기구 형태를 갖는 대부분의 산업용 로봇이나 공작 기계는 넓은 작업공간과 유연한 작업방식을 갖는 장점 때문에 광범위하게 사용되어 왔으나 이송부의 부하관성질량이 커짐에 따라 해당 액츄에이터가 고출력을 요하고, 특히 조인트에서의 오차 누적으로 최종 이송부의 정밀도가 저하되는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 직렬 기구에 비하여 고강성과 고정도를 갖는 병렬기구에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

비선형 시변 시스템인 병렬기구의 동적 모델링에 대한 연구는 다음과 같다. Smith[9]는 힘의 평형으로부터 Newton-Euler Method 을 이용한 연구를 행하였다. 또한 Lagrange Method[1],[7]를 이용하여 에너지 식으로부터 운동방정식을 유도한 Luh[6]이 있다. Screw Theory[7]를 이용해 Fichter[2]는 동적모델링을 하였다. 상기의 연구는 모두 병렬기구의 플랫폼만의 동력학을 고려하였다. 그러나 링크의 관성력이 플랫폼에 비하여 무시할 수 없을 경우에는 모델링의 오차가 커져서 제어기 설계 시 문제가 될 수 있다. 이에 반해 Lebret[4], Ji[3], Pierrot[8]은 플랫폼과 링크의 동력학을 같이 고려하였다. Lebret 는 Lagrange Method 를 이용하여 Stewart platform 에 적용하였고, Ji 는 Newton-Euler Method 를 이용하여 유도하였으며 Pierrot 는 링크를 양끝에 질량이 집중된 링크로 모델링하여 유도하였다. 이상의 연구는 Stewart platform 과 유사한 구조의 병렬기구에 대하여 동역학을 고려하였다.

본 연구에서는 PRPS (prismatic-revolute-prismatic-spherical joint) 구조를 갖는 6 자유도의 병렬기구를 대상으로 하였다. 동역학 모델링 시 플랫폼과 링크의 관성력을 동시에 고려하였고 구속조건이 있는 경우 유용한 라그랑지-달랑베르 방법을 이용하여 운동방정식을 유도하였다. 본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2 장은 제안한 병렬기구의 기구학에 대하여 기술하였고 3 장에서는 링크를 고려한 동역학 모델링을 하였다. 4 장은 모델링 검증용을 위한 시뮬레이션 결과를 보이고, 5 장은 결론에 대하여 언급하였다.

### 2. 병렬기구의 기구학

#### 2.1 기구 구조 및 좌표계

본 연구의 기구는 PRPS 구조를 갖는 6 자유도의 병렬기구로 그림 1 과 같이 공간상에 서있는 3 개의 선형 액츄에이터와 베이스 평면상에 놓인 3 개의 선형 액츄에이터로 구동되며 플랫폼과 공간상의 링크는 3 개의 볼(ball) 조인트로 연결되어 있고 링크와 베이스는 3 개의 회전(revolute) 조인트로 연결되어 있다.

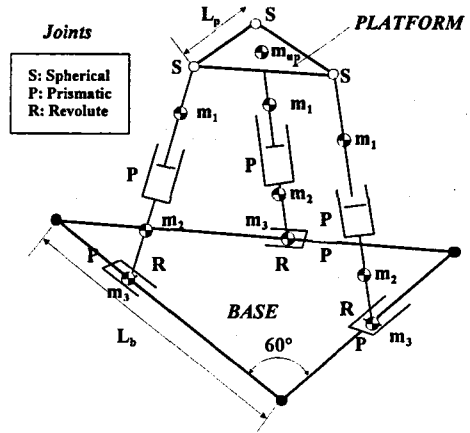


Fig. 1 Configuration & structure of parallel manipulator

병렬기구의 운동을 기술하기 위해 각 강체마다 선형 및 회전 운동을 나타내는 적절한 좌표계를 그림 2,3 과 같이 잡는다. 여기서  $l_j(j=1, \dots, 6)$  는 각 링크의 선형운동좌표,  $\theta_i(i=1,2,3)$  는 서있는 링크의 회전운동좌표이다.  $P_i$  는 플랫폼 무게중심의 위치,  $L_{ui}$  는 서 있는 링크의 상부부분,  $L_{li}$  는 하부부분,  $L_{ui+3}$  는 바닥 링크의 질량 중심을 나타낸다.  $P_i$  가 원점인 플랫폼 좌표계는 플랫폼에 대한 물체 고정 좌표계(body fixed frame)이고,  $O_0$  는 베이스의 중심위치를  $O_0$  가 원점인 좌표계는 관성 좌표계(inertial frame)이다. 위의 모든 강체의 질량중심은 모두 관성 좌표계로 기술한다. 그림 3 에서는 서 있는 링크를 모델링 한 것으로, 각각의 실린더 형 링크를 두개의 실린더 형 링크로 나누어 모델링 하였다.

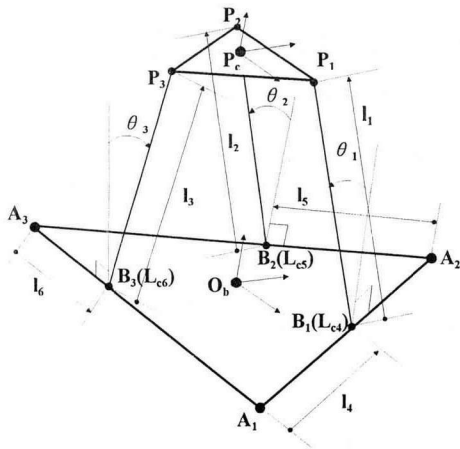


Fig. 2 Coordinate system for parallel manipulator

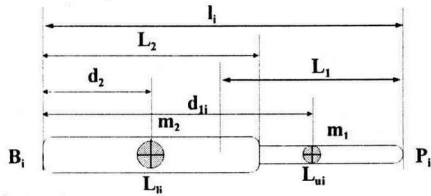


Fig. 3 Modeling of standing link

## 2.2 순기구학

순기구학이란 링크의 좌표계로부터 플랫폼의 위치, 회전을 기술하는 것으로 플랫폼 무게중심의 위치  $P_c$  및 플랫폼 좌표계의 회전변환행렬  $R_p$  을 구하면 다음과 같다.

$$P_c = P_c(l, \theta) = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$$

$$R_p(l, \theta) = [e_1 \quad e_2 \quad e_3]$$

$$e_1 = \frac{P_1 - P_2}{|P_1 - P_2|}, e_2 = \frac{(P_1 + P_2)/2 - P_3}{|(P_1 + P_2)/2 - P_3|}, e_3 = e_1 \times e_2 \quad (1)$$

Where

$$l = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6]^T, \theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$

링크 각 부위의 무게중심의 위치 및 링크 좌표계의 회전변환행렬  $R_{Lj}$  를 나타내면 다음과 같다.

$$L_{ui} = B_i + d_{1i}(P_i - B_i)$$

$$L_{ji} = B_i + d_{2i}(P_i - B_i) \quad (2)$$

$$L_{c1+3} = B_i \quad (i=1,2,3)$$

$$R_{L1} = R_1(-\theta_1), R_{L2} = R_1(-\theta_2), R_{L3} = R_1(-\theta_3)$$

## 2.3 역기구학

역기구학이란 플랫폼의 위치, 회전으로부터 링크의 좌표계를 기술하는 것으로 초기 플랫폼의 위치를  $P_o$ , 초기 플랫폼의 모서리의 위치를  $P_{io}$ , 플랫폼의 현재 위치를  $P_c$ , 플랫폼의 현재 회전변환행렬을  $R$  이라 하면 다음식을 이용하여 구할 수 있다.

$$P_i = RP_{io} + (P_c - P_{co}), P_i = P_i(l, \theta)$$

$$l_j = l_j(P_i, \theta) \quad (i=1,2,3 \quad j=1, \dots, 6) \quad (3)$$

## 2.4 구속조건

서있는 링크는 한쪽 끝이 회전조인트에 의한 구속되는 한 방향에 대한 회전 좌표이다. 이때  $\theta$  는 플랫폼의 모서리 세 점간의 길이가 일정하다는 구속조건으로부터 다음의 식을 이용하여 수치적인 방법으로 구할 수 있다.

$$(P_1 - P_2)^T (P_1 - P_2) = (P_2 - P_3)^T (P_2 - P_3) = (P_3 - P_1)^T (P_3 - P_1) = L_p^2 \quad (4)$$

구속 조건식 (4)를 변형하면 다음과 같다.

$$g_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - L_p^2 = 0 \quad (i=1,2,3)$$

Where

$$P_2 - P_1 = [x_1, y_1, z_1]^T, P_3 - P_2 = [x_2, y_2, z_2]^T, P_1 - P_3 = [x_3, y_3, z_3]^T$$

이상과 같이 플랫폼의 운동을 기술하는데 필요한 모든 성분들을 링크의 운동 좌표  $l$  로 기술할 수 있다.

## 2.5 자코비안

플랫폼 중심의 병진속도  $P'_c$  는 다음과 같이 구한다.

$$P'_c = \frac{\partial P_c}{\partial l} l' + \frac{\partial P_c}{\partial \theta} \theta' \quad (6)$$

물체 고정 좌표계에 대한 플랫폼의 회전 속도를  $w_{up}$  라 하면 Lie Algebra[7]를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[w_{up}] = R^T R' \quad (7)$$

$$w_{up} = [e_3^T e_2' \quad e_1^T e_3' \quad e_2^T e_1']^T$$

$$= J_l l' + J_\theta \theta' \quad (8)$$

Where

$$e_i' = \frac{\partial e_i}{\partial l} l' + \frac{\partial e_i}{\partial \theta} \theta' \quad (i=1,2,3)$$

$$J_l = E^T E_l \in R^{3 \times 6}, J_\theta = E^T E_\theta \in R^{3 \times 3}$$

$$E = \begin{bmatrix} e_3 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}, E_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_2}{\partial l} \\ \frac{\partial e_3}{\partial l} \\ \frac{\partial e_1}{\partial l} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 6}, E_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial e_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial e_1}{\partial \theta} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}$$

각 링크 중심의 병진속도  $L'_{ij}$  는 다음과 같이 구한다.

$$L'_{ij} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial l} l' + \frac{\partial L_{ij}}{\partial \theta} \theta' \quad (j=1, \dots, 6) \quad (9)$$

물체 고정 좌표계에 대한 각 링크의 회전 속도를  $w_{Lij}$  라 하면 서있는 링크만 각각 한 축에 대해서만 회전한다는 것을 이용하여 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

$$w_{Lij} = \begin{cases} [\theta_j' & 0 & 0]^T & (j=1,2,3) \\ [0 & 0 & 0]^T & (j=4,5,6) \end{cases} \quad (10)$$

한편 식(5)을 편미분하면  $l'$  과  $\theta'$  간의 관계를 다음과 같이 얻는다.

$$\theta' = J_\theta l' \quad (11)$$

$$J_\theta = - \begin{bmatrix} \frac{\partial e_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial e_3}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial e_2}{\partial l} \\ \frac{\partial e_3}{\partial l} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 6}$$

## 3. 링크의 관성을 고려한 동적 모델링

본 연구에서는 링크의 동역학도 함께 고려한 모델링을 라그랑지-달랑베르 방법을 이용하여 구하였다. 운동방정식은 링크의 길이로 구성된 6개의 좌표계에 대하여 기술하

었다. 각 강체의 총 운동에너지  $T$ 와 총 위치에너지  $V$ 를 구한 후, 라그랑지안을 다음과 같이 구한다.

$$L = T - V \quad (12)$$

이때 아래 첨자 Up는 플랫폼을, L은 링크를, tran은 선형성분을, rot은 회전성분을 나타낸다.

$$\begin{aligned} T &= T_{Up} + T_L \\ V &= V_{Up} + V_L \\ \text{Where,} \\ T_{Up} &= T_{Up,tran} + T_{Up,rot}, T_L = T_{L,tran} + T_{L,rot} \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.1 플랫폼의 역학적 에너지

플랫폼의 병진운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{up,tran} &= \frac{1}{2} m_{up} P_c^T P_c = \frac{1}{2} I^T M_{Up,tran1} I' + \frac{1}{2} \theta^T M_{Up,tran2} \theta \\ &\quad + \theta^T M_{Up,tran3} I' \\ \text{Where} \\ M_{Up,tran1} &= m_{up} \frac{\partial P_c}{\partial a} \frac{\partial P_c}{\partial a} \in R^{6 \times 6} \\ M_{Up,tran2} &= m_{up} \frac{\partial P_c}{\partial \theta} \frac{\partial P_c}{\partial \theta} \in R^{3 \times 3} \\ M_{Up,tran3} &= m_{up} \frac{\partial P_c}{\partial \theta} \frac{\partial P_c}{\partial a} \in R^{3 \times 6} \end{aligned} \quad (14)$$

플랫폼의 회전운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{Up,rot} &= \frac{1}{2} W_{Up}^T I_{Up} W_{Up} = \frac{1}{2} I^T M_{Up,rot1} I' + \frac{1}{2} \theta^T M_{Up,rot2} \theta \\ &\quad + \theta^T M_{Up,rot3} I' \\ \text{Where} \\ I_{Up} &= \begin{bmatrix} I_{Up1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Up2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Up3} \end{bmatrix} \\ M_{Up,rot1} &= J_1^T I_{Up} J_1 \in R^{6 \times 6} \\ M_{Up,rot2} &= J_\theta^T I_{Up} J_\theta \in R^{3 \times 3} \\ M_{Up,rot3} &= J_\theta^T I_{Up} J_1 \in R^{3 \times 6} \end{aligned} \quad (15)$$

플랫폼의 위치에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_{up} &= m_{up} g P_{C,z} = m_{up} g (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3) / 3 \\ &= h^T \frac{m_{up} g}{3} l \\ \text{Where} \\ h &= [\sin \theta_1 \quad \sin \theta_2 \quad \sin \theta_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.2 링크의 역학적 에너지

링크의 병진운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{L,tran} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 [m_1 L_{ui}^T L'_{ui} + m_2 L_{li}^T L'_{li}] + \frac{1}{2} \sum_{i=4}^6 m_3 L_{ci}^T L'_{ci} \\ &= \frac{1}{2} I^T M_{L,tran1} \theta' + \frac{1}{2} \theta'^T M_{L,tran2} \theta' + \theta'^T M_{L,tran3} I' \end{aligned} \quad (17)$$

Where

$$\begin{aligned} M_{L,tran1} &= \sum_{i=1}^3 \left[ m_1 \frac{\partial L_{ui}}{\partial a} \frac{\partial L_{ui}}{\partial a} + m_2 \frac{\partial L_{li}}{\partial a} \frac{\partial L_{li}}{\partial a} \right] + \sum_{i=4}^6 m_3 \frac{\partial L_{ci}}{\partial a} \frac{\partial L_{ci}}{\partial a} \in R^{6 \times 6} \\ M_{L,tran2} &= \sum_{i=1}^3 \left[ m_1 \frac{\partial L_{ui}}{\partial \theta} \frac{\partial L_{ui}}{\partial \theta} + m_2 \frac{\partial L_{li}}{\partial \theta} \frac{\partial L_{li}}{\partial \theta} \right] + \sum_{i=4}^6 m_3 \frac{\partial L_{ci}}{\partial \theta} \frac{\partial L_{ci}}{\partial \theta} \in R^{3 \times 3} \\ M_{L,tran3} &= \sum_{i=1}^3 \left[ m_1 \frac{\partial L_{ui}}{\partial \theta} \frac{\partial L_{ui}}{\partial a} + m_2 \frac{\partial L_{li}}{\partial \theta} \frac{\partial L_{li}}{\partial a} \right] + \sum_{i=4}^6 m_3 \frac{\partial L_{ci}}{\partial \theta} \frac{\partial L_{ci}}{\partial a} \in R^{3 \times 6} \end{aligned}$$

링크의 회전운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_{L,rot} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 W_{Li}^T I_{Li} W_{Li} = \frac{1}{2} \theta'^T I_L \theta' \\ \text{Where} \end{aligned} \quad (18)$$

$$I_{Li} = \begin{bmatrix} I_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{i,3} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}, I_L = \begin{bmatrix} I_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3,1} \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3}$$

링크의 위치에너지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_L &= \sum_{i=1}^3 (m_1 d_{i1} + m_2 d_{i2}) g \sin \theta_i = \sum_{i=1}^3 (m_1 l_i + m_2 l_c) g \sin \theta_i \\ &= h^T (m_L l_o + m_1 l) g \\ \text{Where} \\ d_{i1} &= l_i - L_i / 2, m_L = m_1 + m_2 \\ l_c &= (m_2 d_2 - m_1 L_1 / 2) / m_L \\ l_o &= l_c [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \end{aligned} \quad (19)$$

구한 에너지식들을 식(12)에 대입한 후 라그랑지안을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} L(l, l', \theta, \theta') &= T - V \\ \text{Where} \\ T &= \frac{1}{2} I^T M_1(l, \theta) I' + \frac{1}{2} \theta'^T M_2(l, \theta) \theta' + \theta'^T M_3(l, \theta) I' \\ M_1 &= M_{Up,tran1} + M_{Up,rot1} + M_{L,tran1} \in R^{6 \times 6} \\ M_2 &= M_{Up,tran2} + M_{Up,rot2} + M_{L,tran2} + I_L \in R^{3 \times 3} \\ M_3 &= M_{Up,tran3} + M_{Up,rot3} + M_{L,tran3} \in R^{3 \times 6} \\ V &= h(\theta)^T \cdot \Phi(l) \\ \Phi(l) &= m_L g l_o + \left( \frac{m_{up}}{3} + m_1 \right) g l \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.3 운동방정식

라그랑지-달랑베르 방법을 정리하면 다음과 같다.

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial l'} \right) - \frac{\partial L}{\partial l} - F_l^T \right] \delta l + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} - F_\theta^T \right] \delta \theta = 0 \quad (21)$$

이때  $\delta \theta = J_\theta \delta l$ ,  $F_l = u$ ,  $F_\theta = 0$ 를 이용하고 변분법을 적용하여 식을 정리하면 위식을 만족하는 해는 다음 식의 해와 같다.

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial l'} \right) - \frac{\partial L}{\partial l} \right]^T + J_\theta^T \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \right]^T = u \quad (22)$$

이를 이용하여 동력학 식을 정리하면 다음과 같다.

$$M l'' + C l' + N = u \quad (23)$$

Where

$$\begin{aligned} M(l, \theta) &= M_1 + J_\theta^T M_2 J_\theta + J_o^T M_3 + (J_o^T M_3)^T \\ C(l, l', \theta, \theta') &= C_1(l, l', \theta, \theta') - C_2(l, l', \theta, \theta') \\ C_1(l, l', \theta, \theta') &= M_1' + J_\theta^T M_2' J_\theta + J_o^T M_3' + (J_o^T M_3')^T + J_\theta^T M_2 J_o + M_3^T J_o' \\ C_2(l, l', \theta, \theta') &= \frac{\partial}{\partial l} (M_1 l')^T + \left[ \frac{\partial}{\partial l} (M_2 \theta') + \frac{\partial}{\partial l} (M_3 l') \right] J_o \\ &\quad + J_o^T \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (M_1 l')^T + \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (M_2 \theta') + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_3 l') \right] J_o \right\} \\ N(l, \theta) &= \frac{\partial \Phi(l)^T}{\partial l} h(\theta) + J_\theta^T \frac{\partial h(\theta)^T}{\partial l} \Phi(l) \end{aligned}$$

## 4. Simulation and Results

앞서 유도한 식을 Mathematica 를 이용하여 Analytic Solution 을 구하였고 이를 Matlab 을 이용하여 수치적인 응답을 구하였다. 이를 ADAMS 로 구한 결과를 비교하여 모델링을 검증하였다.

초기 위치에서 Matlab 을 통해 구한 힘을 ADAMS 에 대입하여 정적인 힘의 평형이 이룸을 확인하여 보았다.(그림 4,5).

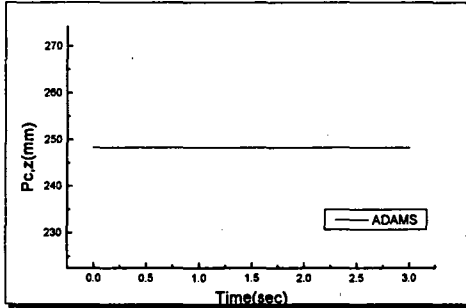


Fig 4. Z-axis displacement of platform center for constant force

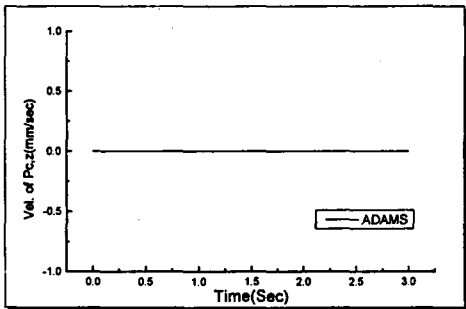


Fig 5. Z-axis velocity of platform center for constant force

또한 정적인 힘에 sine 파 입력을 더한 동적인 입력에 대하여 동일한 응답이 나오는 지 각각의 응답을 구하여 비교하였다.(그림 6,7)

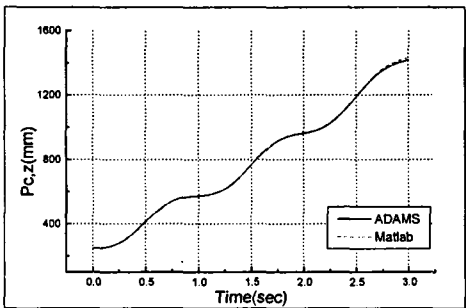


Fig. 6 Z-axis displacement of platform center for sine force

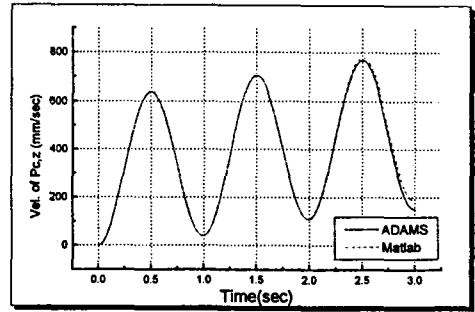


Fig. 7 Z-axis velocity of platform center for sine force

## 5. 결론

본 연구는 기존의 Stewart platform 구조가 아닌 3-PRPS 구조의 병렬기구를 대상으로 정확한 운동방정식을 구하기 위하여 플랫폼과 링크를 함께 고려한 동적 모델링을 행하였다. 라그랑지-달랑베르 방법을 이용하여 에너지식을 도출한 후 최종적으로 운동방정식을 유도하였다. 이러한 운동방정식은 플랫폼과 6 개의 링크의 관성효과를 고려한 6 자유도의 운동방정식으로 링크공간에서 기술하여 운동 제어 시 사용이 쉽도록 하였다.

모델링한 운동방정식을 기초로 하여 Matlab 과 ADAMS 로 시뮬레이션을 행하여 모델링의 정확성을 검증하였다.

## 참고문헌

- [1] S. H. Crandall, "Dynamics", McGraw-Hill Inc. USA, 1968.
- [2] E. F. Fichter, "A Stewart platform-based manipulator : general theory and practical construction", *J. Robotics Research*, vol. 5, no. 2, pp. 157-182, 1986.
- [3] Z. Ji, "Study of the effect of leg inertia in Stewart platforms", *IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 121-126, 1993.
- [4] G. Leuret, K. Liu, F. L. Lewis, "Dynamic analysis of a Stewart platform manipulator", *J. Robotic Systems*, vol. 10, no. 5, pp. 629-655, 1993.
- [5] K. Liu, M. Fitzgerald, D. Dawson, and F. L. Lewis, "Modeling and Control of a Stewart Platform Manipulator", *Proc. of the Sym. of Control of Systems with Inexact Dynamic Models*, Atlanta, GA, pp. 83-99.
- [6] J. Y. S. Luh, Y. Zheng, "Computation of input generalized forces for robots with closed kinematic chain mechanisms", *IEEE J. of Robotics and Automation*, vol. RA-1, no. 2, pp. 95-103, 1985.
- [7] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry, "A Mathematical Introduction to Robotic Manipulator", CRC Press, USA, 1994.
- [8] F. Pierrot, P. Dauchez, A. Fournier, "Towards a fully-parallel 6 dof robot for high speed applications", *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1288-1293, 1991.
- [9] D. A. Smith, "Reaction force analysis in generalized machine systems", *ASME J. Engineering for Industry*, vol. 95, pp. 617-623, 1973.